

关联大系统的静态输出反馈控制*

郭 岗¹, 牛文生², 崔西宁², 朱 敏³

(1. 洛阳师范学院信息技术学院, 河南 洛阳 471022;

2. 中国航空计算技术研究所, 陕西 西安 710068;

3. 西安通信学院, 陕西 西安 710106)

摘 要: 研究了一类基于 T-S 双线性模型的非线性关联大系统的分散静态输出控制反馈问题。应用 Lyapunov 稳定性分析理论, 得到了闭环关联大系统渐近稳定的充分条件, 并把这些条件转换成线性矩阵不等式 (LMI) 的形式, 相应的分散模糊控制器可由线性矩阵不等式的解得到。最后, 通过仿真数例验证了所提方法的有效性。

关键词: 非线性关联大系统; 模糊双线性模型; 分散控制; 静态输出反馈控制; 线性矩阵不等式 (LMI)

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2011) 01-0014-04

Static Output Feedback Control for a Interconnected Systems

GUO Gang¹, NIU Wensheng², CUI Xining², ZHU Min³

(1. Academy of Information Technology, Luoyang Normal University, Luoyang 471022, China;

2. Aeronautics Computing Technique Research Institute, Xi'an 710068, China;

3. Xi'an Communications Institute, Xi'an 710106, China)

Abstract: The problem of decentralized static output feedback control for a nonlinear interconnected system which is composed by a number of Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy bilinear subsystems with interconnections is presented. Based on the Lyapunov criterion, some sufficient stabilization conditions are derived for the whole close-loop fuzzy interconnected systems. The stabilization conditions are further formulated into linear matrix inequalities (LMI) so that the corresponding decentralized controllers can be easily obtained by using the Matlab LMI toolbox. Finally, a simulation example shows that the approach is effective.

Key words: nonlinear interconnected system; fuzzy bilinear model; decentralized control; static output feedback control; linear matrix inequality (LMI)

基于 T-S 模型的模糊控制是研究非线性系统比较成功的方法之一, 在非线性和关联大系统的分散控制方面, 已有不少成果面世^[1-6]。但这些文献中 T-S 模型的模糊规则的后件部分都是一个线性模型。对于一些非线性系统, 当用线性模型不能描述时, 往往可以用双线性模型来描述。考虑 T-S 模型的有效性和双线性系统的特点, 基于 T-S 双线性模型的模糊控制就引起了学者的关注。和常见的 T-S 模糊模型不同, 模糊双线性控制系统模糊规则的后

件部分是一个双线性模型。目前, 在对双线性模糊控制的研究中, 控制器大都是关于状态反馈的, 关于静态输出反馈控制的结果则很少^[7-10]。静态输出反馈控制直接利用系统的输出量来设计控制器, 不用考虑系统状态是否可观测, 而且静态输出反馈控制器结构简单, 具有良好的应用价值。

本文研究了一类模糊双线性关联大系统的静态输出反馈控制问题。基于 Lyapunov 稳定性理论, 得到了关联大系统渐近稳定的充分条件, 并把这种

* 收稿日期: 2010-02-04

基金项目: 国防基金科研资助项目 (C0520061364)

作者简介: 郭岗 (1972 年生), 男, 博士; E-mail: guogang@lynu.edu.cn

条件转换成线性矩阵不等式 (LMI) 形式, 相应的分散模糊控制器可以通过求解 LMI 得到。这种方法简化了设计程序, 并由数例仿真验证了结果的有效性。

1 系统描述

一类由 s 个子系统组成的模糊双线性关联大系统, 通过单点模糊化, 乘积推理和中心平均反模糊化方法, 可得系统的总体模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{m=1}^{r_i} h_{im}(\xi_i(t)) [A_{im}x_i(t) + \\ &N_{im}x_i(t)u_i(t) + B_{im}u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^s D_{jim}x_j(t)], \\ y_i(t) &= \sum_{m=1}^{r_i} h_{im}(\xi_i(t)) C_{im}x_i(t), \\ i &= 1, 2, \dots, s, m = 1, 2, \dots, r_i \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $h_{im}(\xi_i(t)) = \frac{\omega_{im}(\xi_i(t))}{\sum_{m=1}^{r_i} \omega_{im}(\xi_i(t))}$, $\omega_{im}(\xi_i(t)) =$

$\prod_{j=1}^{v_i} \mu_{imj}(\xi_i(t)) \circ \mu_{imj}(\xi_i(t))$ 是 $\xi_i(t)$ 在 M_{ij}^m 中的隶属度函数。文中假设 $\omega_{im}(\xi_i(t)) \geq 0$, $\sum_{m=1}^{r_i} \omega_{im}(\xi_i(t)) > 0$ 。由 $h_{im}(\xi_i(t))$ 的定义可知 $h_{im}(\xi_i(t)) \geq 0$, $\sum_{m=1}^{r_i} h_{im}(\xi_i(t)) = 1$ 。以下在不引起混淆的情况下记 $h_{im}(\xi_i(t))$ 为 h_{im} 。

根据并行分布补偿算法, 考虑局部反馈控制器 if $y_{il}(t)$ is M_{il}^m and \dots and $y_{iv}(t)$ is M_{iv}^m

$$\text{then } u_i(t) = \frac{\rho_i F_{im} y_i(t)}{\sqrt{1 + y_i^T F_{im}^T F_{im} y_i}} = \rho_i \sin \theta_{im} = \rho_i \cos \theta_{im} F_{im} y_i(t) \quad (2)$$

这里 $F_{im} \in \mathbb{R}^{1 \times q_i}$ 是待求的控制器增益, $\rho_i > 0$ 是待

定的标量, $\sin \theta_{im} = \frac{F_{im} y_i(t)}{\sqrt{1 + y_i^T F_{im}^T F_{im} y_i}}$, $\cos \theta_{im} =$

$\frac{1}{\sqrt{1 + y_i^T F_{im}^T F_{im} y_i}}$, $\theta_{im} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。则全局分散控制律可表示为

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{m=1}^{r_i} h_{im} \frac{\rho_i F_{im} y_i(t)}{\sqrt{1 + y_i^T F_{im}^T F_{im} y_i}} = \\ \sum_{m=1}^{r_i} h_{im} \rho_i \sin \theta_{im} &= \sum_{m=1}^{r_i} h_{im} \rho_i \cos \theta_{im} F_{im} y_i(t) \end{aligned} \quad (3)$$

在控制律 (3) 的作用下, 整个闭环系统的方程可表示为

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{m,n,l=1}^{r_i} h_{im} h_{in} h_{il} (A_{i,mnl} x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^s D_{jim} x_j(t)) \quad (4)$$

这里 $A_{i,mnl} = A_{im} + \rho_i \sin \theta_{in} N_{im} + \rho_i \cos \theta_{in} B_{im} K_{in} C_{il}$ 。

本文目标: 对于由 s 个子系统组成的模糊关联

大系统, 对每一个子系统设计局部静态输出反馈控制器, 使得闭环关联大系统 (4) 渐近稳定。

2 主要结论

定理 1 对于给定的常数 $\rho_i > 0, \varepsilon_i > 0$, 如果在矩阵 $Z_i > 0$, 和矩阵 $F_{im}, n = 1, 2, \dots, r_i$ 满足矩阵不等式 (5), 则关联大系统 (4) 是渐近稳定的。

$$\Phi_{i,mnl} = \begin{bmatrix} \phi_{i,m} & Z_i & (N_{im} Z_i)^T & (B_{im} F_{in} C_{il} Z_i)^T \\ * & -\frac{1}{s-1} I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

其中, $\phi_{i,m} = Z_i A_{im}^T + A_{im} Z_i + \varepsilon_i \rho_i^2 I + \sum_{j=1, j \neq i}^s D_{jim} D_{jim}^T$ 。

证明 考虑选取如下 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^s V_i(t) = \sum_{i=1}^s x_i^T(t) P_i x_i(t) \quad (6)$$

这里 $P_i = Z_i^{-1}$ 为待求的正定对称矩阵。

沿着系统 (4) 的轨线, 对 $V(t)$ 求导, 可得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^s \sum_{m,n,l=1}^{r_i} h_{im} h_{in} h_{il} \cdot \\ &[x_i^T(t) (A_{i,mnl}^T P_i + P_i A_{i,mnl}) x_i(t) + \\ &\sum_{j=1, j \neq i}^s x_j^T(t) D_{jim}^T P_i x_i(t) + \\ &x_i^T(t) P_i \sum_{j=1, j \neq i}^s D_{jim} x_j(t)] \end{aligned} \quad (7)$$

考虑下式, 并由文 [11] 中引理可知

$$A_{i,mnl}^T P_i + P_i A_{i,mnl} \leq A_{im}^T P_i + P_i A_{im} + \varepsilon_i \rho_i^2 P_i P_i + \varepsilon_i^{-1} N_{im}^T N_{im} + \varepsilon_i^{-1} (B_{im} F_{in} C_{il})^T (B_{im} F_{in} C_{il}) \quad (8)$$

同样考虑下式, 并由文 [11] 中引理可得到

$$\sum_{i=1}^s \sum_{m=1}^{r_i} h_{im} [x_j^T(t) \sum_{j=1, j \neq i}^s D_{jim}^T P_i x_i(t) + x_i^T(t) P_i \sum_{j=1, j \neq i}^s D_{jim} x_j(t)] \leq$$

$$\sum_{i=1}^s \sum_{m=1}^{r_i} h_{im} [x_i^T(t) P_i \sum_{j=1, j \neq i}^s D_{jim} D_{jim}^T P_i x_i(t) + (s-1) x_i^T(t) x_i(t)] \quad (9)$$

把 (8) 式、(9) 式代入 (7) 式, 可得到

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^s \sum_{m,n,l=1}^{r_i} h_{im} h_{in} h_{il} x_i^T(t) \Gamma_{i,mnl} x_i(t) \quad (10)$$

这里

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,mnl} &= A_{im}^T P_i + P_i A_{im} + \varepsilon_i \rho_i^2 P_i P_i + \\ &\varepsilon_i^{-1} N_{im}^T N_{im} + \varepsilon_i^{-1} (B_{im} F_{in} C_{il})^T (B_{im} F_{in} C_{il}) + \\ &(s-1) P_i P_i + P_i \sum_{j=1, j \neq i}^s D_{jim} D_{jim}^T P_i \end{aligned}$$

对定理 1 中的 (5) 式同时左、右乘 $\text{diag}\{P_i, I, I,$

$I\}$, 则可得到

$$\begin{bmatrix} P_i \phi_{i,m} P_i & I & N_{im}^T & (B_{im} F_{in} C_{il})^T \\ * & -\frac{1}{s-1} I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

根据 Schur 补定理可知, (11) 式等价于 $\Gamma_{i,mnl} < 0$ 。从而可得到 $V(t) < 0$ 所以可知关联大系统 (4) 是渐近稳定的。

考虑 (5) 式是双线性矩阵不等式 (BMI), 不能直接用 Matlab 中的 LMI 工具箱求解。为求解控制器, 下面提出一个新的方法把 BMI 转换成 LMI 形式。

定理 2 对于给定的对常数 $\rho_i > 0, \varepsilon_i > 0$, 如果对于常数 $0 < a_i < \min\{\varepsilon_i, \frac{1}{s-1}\}$ 存在矩阵 $Z_i > 0$, 和矩阵 F_{im} , 满足线性矩阵不等式 (12), 则关联大系统 (4) 是渐近稳定。

$$\begin{bmatrix} \phi_{i,m} & Z_i & (N_{im} Z_i)^T & 0 & (C_{il} Z_i)^T \\ * & -(\frac{1}{s-1} - a_i) I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -(\varepsilon_i - a_i) I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_i I & B_{im} F_{in} \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

证明 考虑

$$\begin{bmatrix} \varphi_{i,mnl} = \\ (C_{il} Z_i)^T (C_{il} Z_i) & 0 & 0 & 0 \\ * & a_i I & 0 & 0 \\ * & * & a_i I & 0 \\ * & * & * & (B_{im} F_{in})(B_{im} F_{in})^T \end{bmatrix} > 0$$

假设有 $\Phi_{i,mnl} + \varphi_{i,mnl} < 0$, 则可以得出 $\Phi_{i,mnl} < 0$ 。考虑

$$\begin{bmatrix} \phi_{i,m} & Z_i & (N_{im} Z_i)^T & 0 \\ * & -(\frac{1}{s-1} - a_i) I & 0 & 0 \\ * & * & -(\varepsilon_i - a_i) I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C_{il} Z_i)^T \\ 0 \\ 0 \\ B_{im} F_{in} \end{bmatrix} [C_{il} Z_i \ 0 \ 0 \ (B_{im} F_{in})^T]$$

由 Schur 补定理可知, (12) 式等价于 $\Phi_{i,mnl} + \varphi_{i,mnl}$

< 0 , 进一步可以得 $\Phi_{i,mnl} < 0$ 。根据定理 1, 则可知在静态输出反馈器下, 闭环系统 (4) 是渐近稳定的。

3 算例分析

考虑 2 个子系统复合而成的不确定模糊双线性关联大系统。

Subsystem 1:

$$\begin{aligned} R_1^1: & \text{if } y_1 \text{ is } M_{11}^1 \text{ then} \\ & \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + N_{11}x_1(t)u_1(t) + B_{11}u_1(t) + D_{211}x_2(t), \\ & y_1(t) = C_{11}x_1(t); \\ R_1^2: & \text{if } y_1 \text{ is } M_{11}^2 \text{ then} \\ & \dot{x}_1(t) = A_{12}x_1(t) + N_{12}x_1(t)u_1(t) + B_{12}u_1(t) + D_{212}x_2(t), \\ & y_1(t) = C_{12}x_1(t); \end{aligned}$$

Subsystem 2:

$$\begin{aligned} R_2^1: & \text{if } y_2 \text{ is } M_{21}^1 \text{ then} \\ & \dot{x}_2(t) = A_{21}x_2(t) + N_{21}x_2(t)u_2(t) + B_{21}u_2(t) + D_{121}x_1(t), \\ & y_2(t) = C_{21}x_2(t); \\ R_2^2: & \text{if } y_2 \text{ is } M_{21}^2 \text{ then} \\ & \dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + N_{22}x_2(t)u_2(t) + B_{22}u_2(t) + D_{122}x_1(t), \\ & y_2(t) = C_{22}x_2(t), \text{ 其中} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} -98 & -7.9 \\ 50 & -100 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} -113 & -10 \\ 50 & -100 \end{bmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} -98 & -7.9 \\ 50 & -100 \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} -113 & -10 \\ 50 & -100 \end{bmatrix}, \\ N_{11} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & N_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ N_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & N_{22} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & B_{11} &= \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ B_{12} &= \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_{21} &= \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_{22} &= \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ D_{211} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & D_{212} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ D_{121} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & D_{122} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ C_{11} &= [1 \ 0], & C_{12} &= [1 \ -1], \\ C_{21} &= [1 \ 0], & C_{22} &= [1 \ -1] \end{aligned}$$

选取参数 $\rho_1 = 0.65, \rho_2 = 0.73, \varepsilon_1 = 1.3, \varepsilon_2 = 0.1$ 及隶属度函数 $\mu_{M_{11}^1}(y_1) = \frac{1}{1 + \exp(-y_1)}, \mu_{M_{11}^2}(y_1)$

$= 1 - \mu_{M_{11}}(y_1); \mu_{M_{21}}(y_2) = \frac{1 - \cos(y_2)}{2}, \mu_{M_{21}}(y_2)$
 $= 1 - \mu_{M_{21}}(y_2)$ 。根据定理 2, 求解相应的 LMIs 可以得到

$$K_{11} = [-1.067 \ 1]; K_{12} = [-0.562 \ 8];$$

$$K_{21} = [-1.208 \ 3]; K_{22} = [-1.623 \ 9]$$

对两个子系统分别选取初始值为 $x_{10} = [-1.6 \ 1.7]^T, x_{20} = [-1.9 \ -2.1]^T$, 利用 MATLAB 仿真, 图 1 是子系统 1 的状态变量响应曲线, 图 2 是子系统 2 的状态响应曲线。图 3 是子系统 1 和 2 的控制曲线。由仿真结果可以看出, 在所设计的控制器下, 闭环关联大系统是鲁棒镇定的。

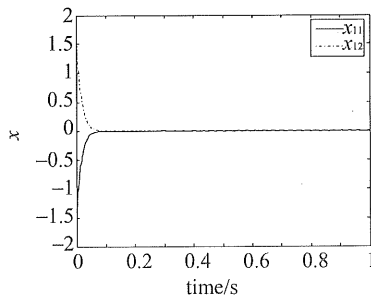


图 1 子系统 1 的状态响应曲线

Fig. 1 State responses of subsystem 1

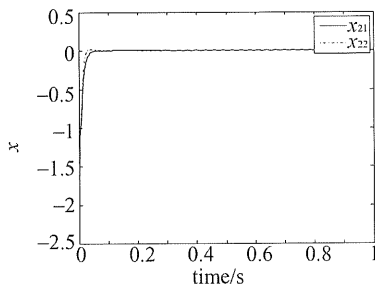


图 2 子系统 2 的状态响应曲线

Fig. 2 State responses of subsystem 2

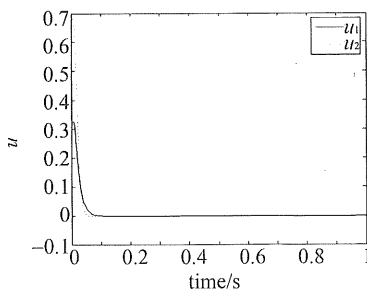


图 3 控制曲线

Fig. 3 Control trajectory

参考文献:

[1] WANG W J, LUOCH L. Stability and stabilization of fuzzy large-scale systems[J]. IEEE Trans Fuzzy Syst, 2004, 12(3): 309-315.

[2] CHEN C W, CHIANG W L, HISAO F F. Stability analysis of T-S fuzzy models for nonlinear multiple time-delay interconnected systems[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2004, 66(6): 523-537.

[3] 张果, 李俊民. 不确定时滞模糊系统的时滞相关鲁棒 H_∞ 控制[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2009, 48(1): 10-15.

[4] 赵立英, 刘坤, 刘贺平. 具有两个时滞和的连续系统的时滞相关稳定性[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2008, 47(1): 26-28.

[5] 郭岗, 王子须, 牛文生, 等. 基于 T-S 双线性模型的非线性关联大系统的分散控制[J]. 武汉大学学报: 工学版, 2010, 43(4): 541-544.

[6] 郭岗, 赵斌, 牛文生, 等. 时变时滞模糊系统的稳定性分析[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2010, 38(7): 130-132.

[7] LI T H S, TSAI S H. T-S fuzzy bilinear model and fuzzy controller design for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans Fuzzy Syst, 2007, 15(3): 494-505.

[8] TSAI S H, LI T H S. Robust fuzzy control of a class of fuzzy bilinear systems with time-delay[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2009, 39(5): 2028-2040.

[9] LI T H S, TSAI S H, LEE J Z, et al. Robust H_∞ fuzzy control for a class of uncertain discrete fuzzy bilinear systems[J]. IEEE Trans Syst, Man Cyber, 2008, 38(2): 510-526.

[10] KAU S W, LEE H J, YANG C M, et al. Robust H_∞ fuzzy static output feedback control of T-S fuzzy systems with parametric uncertainties[J]. Fuzzy Sets and Syst, 2007, 158: 135-146.

[11] WANG R J, LIN W W, WANG W J. Stabilizability of linear quadratic state feedback for uncertain fuzzy time-delay systems[J]. IEEE Trans Syst Man Cyber, 2004, 34(2): 1288-1292.